Illustration : Noémie Ross

Blaise Pascal
1623-1662

Le *triangle arithmétique* a été étudié par Blaise Pascal dans un traité, publié en 1665 à titre posthume, c'est pourquoi il porte le nom de "triangle de Pascal". Il était pourtant connu depuis longtemps et il a joué un rôle dans la démarche de Leibniz pour déterminer le calcul différentiel et intégral.

Pascal

Le triangle arithmétique

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

L'illustration ci-haut représente les premières lignes du *triangle arithmétique de Pascal*. Ce triangle se prolonge à l'infini et possède diverses propriétés.
On remarque facilement la symétrie du triangle, sur une ligne donnée, les mêmes valeurs apparaissent dans le même ordre à partir de la gauche et à partir de la droite. Chaque nombre du triangle est la somme des deux nombres au-dessus de lui.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 + 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 + 7 1
1 8 28 + 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 + 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Cette propriété permet de construire tout le triangle par récurrence, ligne par ligne, en partant du sommet, comme l'illustre la figure ci-contre.

1

1
1 1

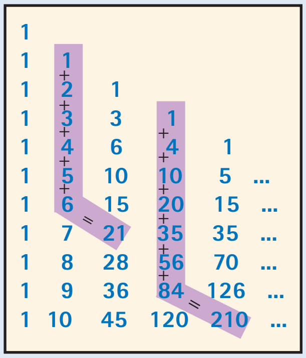
1
1 1
1 2 1

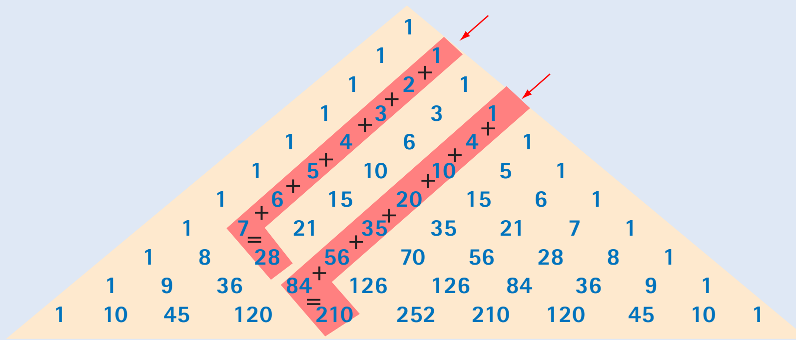
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 1

Les nombres du triangle peuvent se représenter de diverses façons, on peut privilégier un alignement à gauche des éléments de chacune des lignes. Le triangle présente diverses autres propriétés, par exemple, dans les diagonales de droite à gauche, on a la suite des nombres naturels, la suite des nombres triangulaires et celle des nombre pyramidaux à base triangulaire.

	Naturels	Triangulaires	Pyramidaux	
1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	...
1	5	10	10	...
1	6	15	20	...
1	7	21	35	...
1	8	28	56	...
1	9	36	84	...
1	10	45	120	...

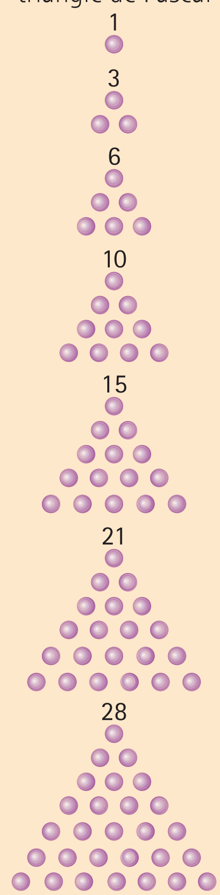
Chaque nombre du triangle de Pascal est la somme des nombres de la diagonale à gauche et au-dessus de ce nombre, comme on l'observe dans l'illustration à droite, pour une disposition en triangle isocèle et dans l'illustration ci-dessous pour une disposition en triangle rectangle.





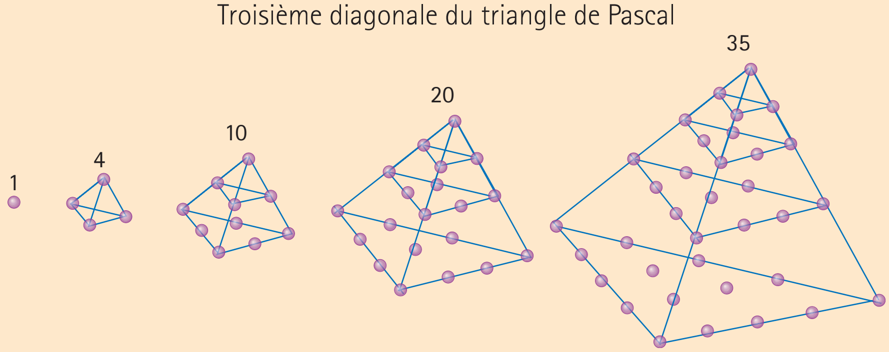
Nombres triangulaires

Deuxième diagonale du triangle de Pascal



Nombres pyramidaux à base triangulaire

Troisième diagonale du triangle de Pascal



Binôme de Newton

Un binôme de Newton est une expression de la forme $(a + b)^n$. Les coefficients des termes du binôme de Newton pour une valeur n donnée sont les nombres de la ligne de rang n du triangle de Pascal en numérotant celles-ci à partir de 0. Dans le développement de $(a + b)^n$, il y a $n + 1$ termes. Dans le premier terme, l'exposant de a est n et il diminue d'une unité de terme en terme, jusqu'à 0 dans le dernier terme. Dans le premier terme, l'exposant de b est 0 et il augmente d'une unité de terme en terme, jusqu'à n dans le dernier terme.

Triangle de Pascal	Binôme de Newton
1	$(a + b)^0 = 1$
1 1	$(a + b)^1 = a + b$
1 2 1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
...	...