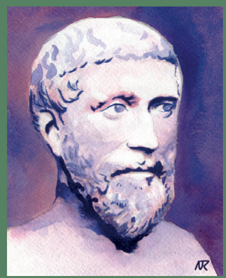


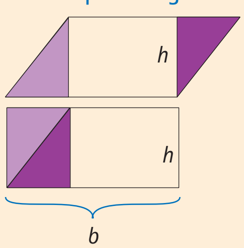
Illustration : Noémie Ross

Pythagore
vers –580 à –495

Les Pythagoriciens s'engageaient à garder secrets les enseignements et les découvertes. Il est donc difficile de savoir s'ils avaient une démonstration générale du théorème. Cependant, s'ils disposaient d'une démonstration, celle-ci devait faire appel à des propriétés géométriques et ne comportait pas de formule.

Pythagore
Démonstration du théorème

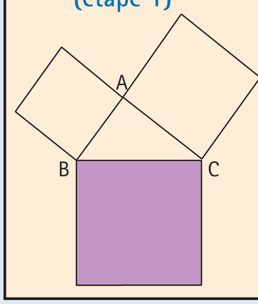
Aire du parallélogramme



Si les Pythagoriciens disposaient d'une démonstration générale de ce théorème, elle était peut-être basée sur le fait que l'aire d'un parallélogramme est égale à l'aire du rectangle ayant même base et même hauteur. Dans les deux cas, l'aire est le produit de la base par la hauteur comme l'illustre la figure à gauche.

Voyons comment on peut utiliser cette propriété pour démontrer le théorème de Pythagore. Considérons un triangle ABC, rectangle en A, et les carrés construits sur les côtés du triangle.

Démonstration (étape 1)



La tablette Plimpton 322

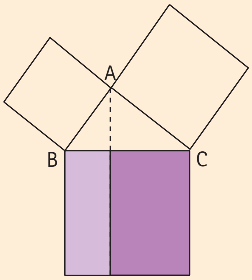
La tablette Plimpton 322,
Rare Book and Manuscript Library
Columbia University

Selon l'interprétation que fait l'historien des mathématiques Otto Eduard Neugebauer (1899 - 1990) de la tablette Plimpton 322, gravée entre ~1900 et ~1600, les Babyloniens auraient connu certains de ces triplets. Il semble bien que Pythagore ait pris connaissance de l'existence de ces triplets durant ses séjours en Égypte et à Babylone.

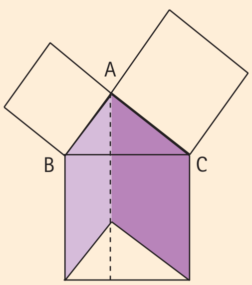
Côté c	Diagonale d	$\sqrt{d^2 - c^2}$
119	169	120
4 601	6 649	4 800
12 709	18 541	13 500
65	97	72
319	481	360
2 291	3 541	2 700
799	1 249	960
4 961	8 161	6 480
45	75	60
1 679	2 929	2 400
1 771	3 229	2 700

Transcription d'un extrait de la tablette Plimpton 322 en système décimal selon l'interprétation de Neugebauer

Démonstration (étape 2)



Démonstration (étape 3)



Du sommet A du triangle, on abaisse une perpendiculaire à l'hypoténuse et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec le côté opposé du carré construit sur l'hypoténuse. La perpendiculaire abaissée divise ce carré en deux rectangles.

Ceux-ci ont même aire que les parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux côtés de l'angle droit du triangle rectangle. On peut déplacer ces parallélogrammes par translation pour faire coïncider leur côté avec ceux du triangle, l'aire demeure constante.

En glissant ces parallélogrammes comme dans la figure ci-contre, la hauteur du parallélogramme de base AB est le segment AE. Son aire est donc égale à celle du carré ABDE.

De plus, la hauteur du parallélogramme de base AC est le segment AG. Son aire est donc égale à celle du carré ACFG.

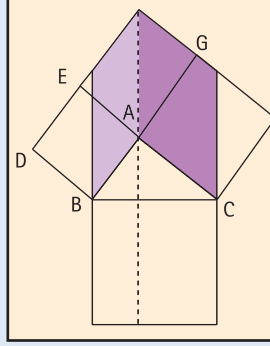
L'aire de chaque parallélogramme est égale à l'aire d'un carré et la somme des aires des parallélogrammes est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

De plus, par construction, cette somme est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse. Ce qui démontre le théorème.

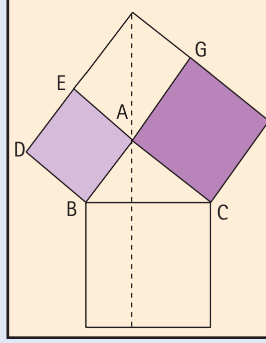
NH Pythagore04

Pythagore05

Démonstration (étape 4)



Démonstration (étape 5)



Autre preuve sans formule

Il existe plusieurs autres démonstrations qui ne nécessitent pas de formules en voici une autre qui se fonde sur le fait que l'aire d'une figure géométrique est invariante par translation.

On reproduit un triangle rectangle sur son hypoténuse pour former un rectangle. On reproduit ce rectangle à partir de l'un de ses sommets de telle sorte que les côtés homologues soient perpendiculaires.

On complète le carré en prolongeant les côtés des rectangles. On forme ainsi les carrés sur les côtés de l'angle droit.

On déplace alors les triangles rectangles par translation pour que chaque sommet de l'angle droit d'un triangle coïncide avec un des sommets du rectangle.

L'aire enclavée par les triangles est alors celle du carré construit sur l'hypoténuse.

Ce qui complète la démonstration.